

GUIA MANGÁ DE

CÁLCULO

DIFERENCIAL E INTEGRAL

HIROYUKI KOJIMA
SHIN TOGAMI
BECOM CO., LTD.



novatec

OHM
Ohmsha



GUIA MANGÁ DE
CÁLCULO
DIFERENCIAL E INTEGRAL

HIROYUKI KOJIMA
SHIN TOGAMI
BECOM CO., LTD.



novatec

SUMÁRIO

| | |
|---|----|
| PREFÁCIO | xi |
| PRÓLOGO: | |
| O QUE É UMA FUNÇÃO? | 1 |
| Exercício | 14 |
| 1 | |
| VAMOS DERIVAR UMA FUNÇÃO! | 15 |
| Aproximando com Funções | 16 |
| Calculando o Erro Relativo | 27 |
| A Derivada em Ação! | 32 |
| Passo 1 | 34 |
| Passo 2 | 34 |
| Passo 2 | 35 |
| Calculando a Derivada | 39 |
| Calculando a Derivada de uma Função Constante, Linear ou Quadrática. | 40 |
| Resumo | 40 |
| Exercícios | 41 |
| 2 | |
| VAMOS APRENDER TÉCNICAS DE DERIVAÇÃO! | 43 |
| A Regra da Soma para Derivação | 48 |
| Regra do Produto de Derivadas | 53 |
| Derivando Polinômios | 62 |
| Encontrando os Pontos de Máximo E De Mínimo | 64 |
| Usando o Teorema do Valor Médio | 72 |
| Usando a Regra do Quociente de Derivação | 74 |
| Calculando Derivadas de Funções Compostas | 75 |
| Calculando Derivadas de Funções Inversas | 75 |
| Exercícios | 76 |
| 3 | |
| VAMOS INTEGRAR UMA FUNÇÃO! | 77 |
| Ilustrando O Teorema Fundamental Do Cálculo | 82 |
| Passo 1 – Quando a Densidade é Constante. | 83 |
| Passo 2 – Quando a Densidade Muda Gradualmente | 84 |
| Passo 3 – Quando a Densidade Muda Continuamente | 85 |
| Passo 4 – Revisão da Função Linear Aproximada | 88 |
| Passo 5 – Aproximação → Valor Exato | 89 |
| Passo 6 – $p(x)$ É a Derivada de $q(x)$ | 90 |

| | |
|--|------|
| Usando o Teorema Fundamental do Cálculo | .91 |
| Resumo | .93 |
| Uma Explicação Rigorosa do Passo 5 | .94 |
| Usando Fórmulas de Integração | .95 |
| Aplicando o Teorema Fundamental | .101 |
| Curva de Oferta | .102 |
| Curva de Demanda. | .103 |
| Revisão do Teorema Fundamental do Cálculo | .110 |
| Fórmula da Regra da Substituição para Integração | .111 |
| A regra da potência de integração | .112 |
| Exercícios | .113 |

4

VAMOS APRENDER TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO!115

| | |
|--|------|
| Usando Funções Trigonométricas | .116 |
| Usando Integrais com Funções Trigonométricas | .125 |
| Usando Funções Exponenciais e Logarítmicas. | .131 |
| Generalizando as Funções Exponencial e Logarítmica | .135 |
| Resumo das Funções Exponencial e Logarítmica | .140 |
| Mais Aplicações do Teorema Fundamental. | .142 |
| Integração por Partes | .143 |
| Exercícios | .144 |

5

VAMOS APRENDER SOBRE EXPANSÕES DE TAYLOR!145

| | |
|---|------|
| Aproximando com Polinômios | .147 |
| Como Obter uma Expansão de Taylor | .155 |
| Expansão de Taylor de Várias Funções. | .160 |
| O Que a Expansão de Taylor Nos Diz? | .161 |
| Exercícios | .178 |

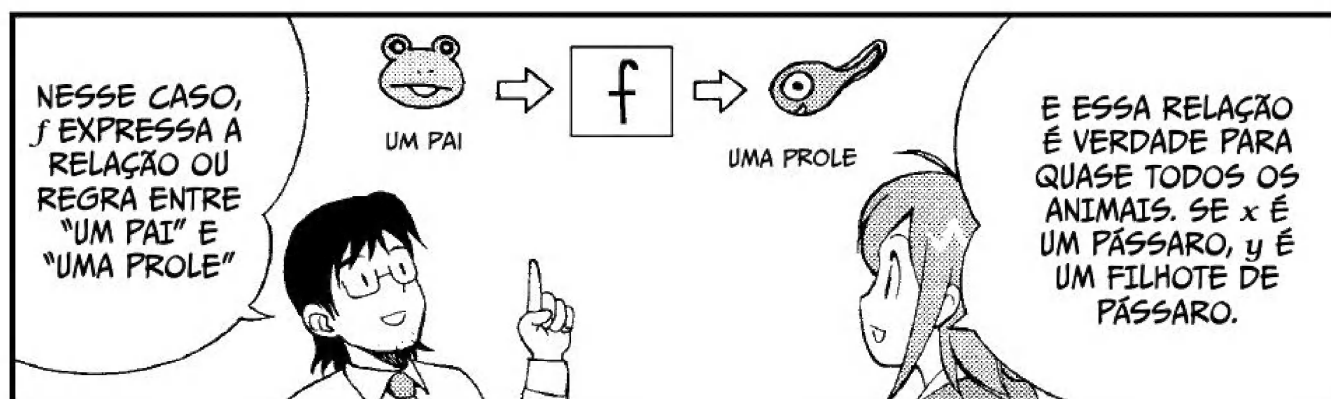
6

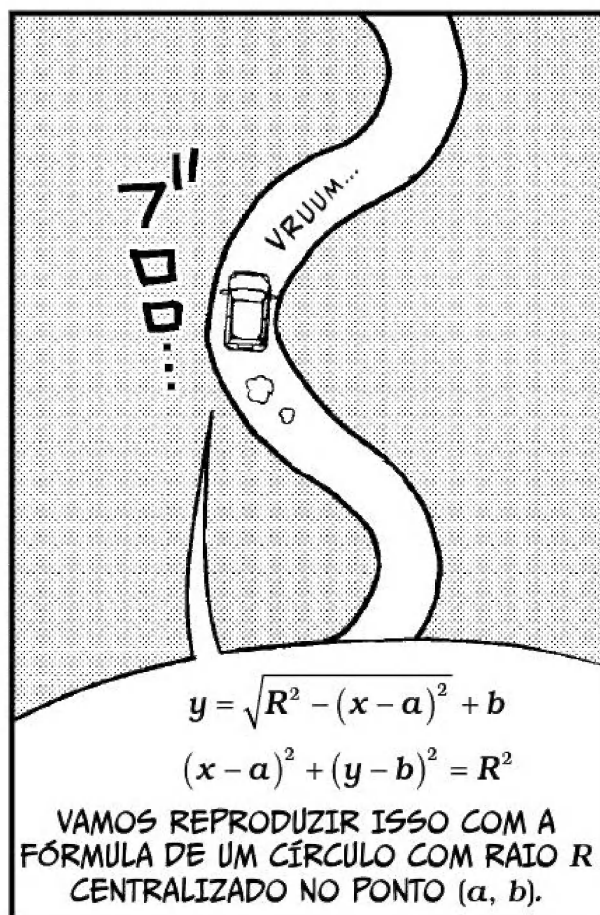
VAMOS APRENDER SOBRE DERIVADAS PARCIAIS!179

| | |
|--|------|
| O Que São Funções Multivariáveis? | .180 |
| O Básico das Funções Lineares Variáveis | .184 |
| Derivação Parcial | .191 |
| Definição da Derivação Parcial | .196 |
| Derivadas Totais. | .197 |
| Condições de Extremidade | .199 |
| Aplicando a Derivação Parcial na Economia. | .202 |
| Regra da Cadeia | .206 |
| Derivadas de Funções Implícitas. | .218 |
| Exercícios | .218 |

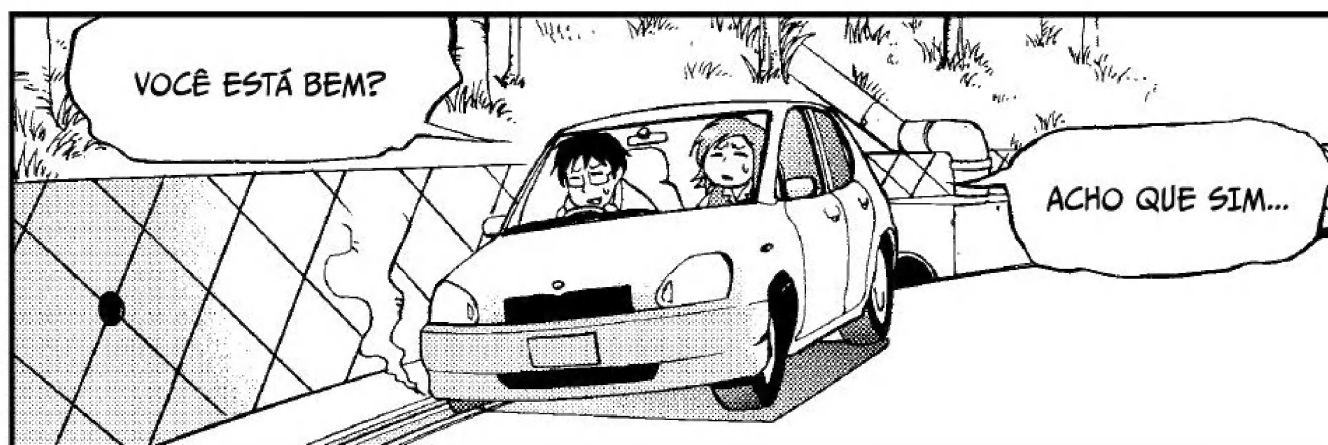
| | |
|--|----------------|
| EPÍLOGO: | |
| PARA QUE SERVE A MATEMÁTICA? | 219 |
| A | |
| SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS | 225 |
| Prólogo | 225 |
| Capítulo 1. | 225 |
| Capítulo 2. | 225 |
| Capítulo 3. | 226 |
| Capítulo 4. | 227 |
| Capítulo 5. | 228 |
| Capítulo 6. | 229 |
| B | |
| PRINCIPAIS FÓRMULAS, TEOREMAS E FUNÇÕES APRESENTADOS NESTE LIVRO .. | 231 |
| Equações Lineares (Funções Lineares) | 231 |
| Derivação | 231 |
| Derivadas das Funções mais Comuns. | 232 |
| Integrais | 233 |
| Expansão de Taylor | 234 |
| Derivadas Parciais | 234 |
| ÍNDICE | 235 |







CABUM!



CALCULANDO O ERRO RELATIVO

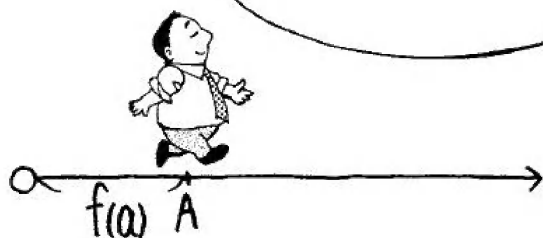


| | | | |
|-----------------|--|-------------------------------|-----------------|
| | Nossa função original | Nossa função aproximada | |
| | ↓ | ↓ | |
| Erro relativo = | $\frac{\text{Diferença entre } f(x) \text{ e } g(x)}{\text{Variação de } x}$ | | SIMPLES, CERTO? |

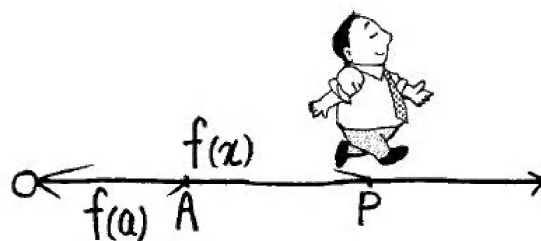


SUPONHA QUE A DISTÂNCIA QUE ELE CAMINHE EM x MINUTOS A PARTIR DO PONTO DE REFERÊNCIA O SEJA $f(x)$ METROS.

EM a MINUTOS, ELE ESTARIA NO PONTO A.



E SUPONHA QUE, EM x MINUTOS, ELE ESTARIA NO PONTO P.



ISSO SIGNIFICA QUE ELE VIAJOU DE A ATÉ P EM $(x - a)$ MINUTOS.

CERTO. MAS ISSO SIGNIFICA ALGO?

SUPONHA QUE ESSE TEMPO DE VIAGEM $(x - a)$ SEJA EXTREMAMENTE PEQUENO.

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$$

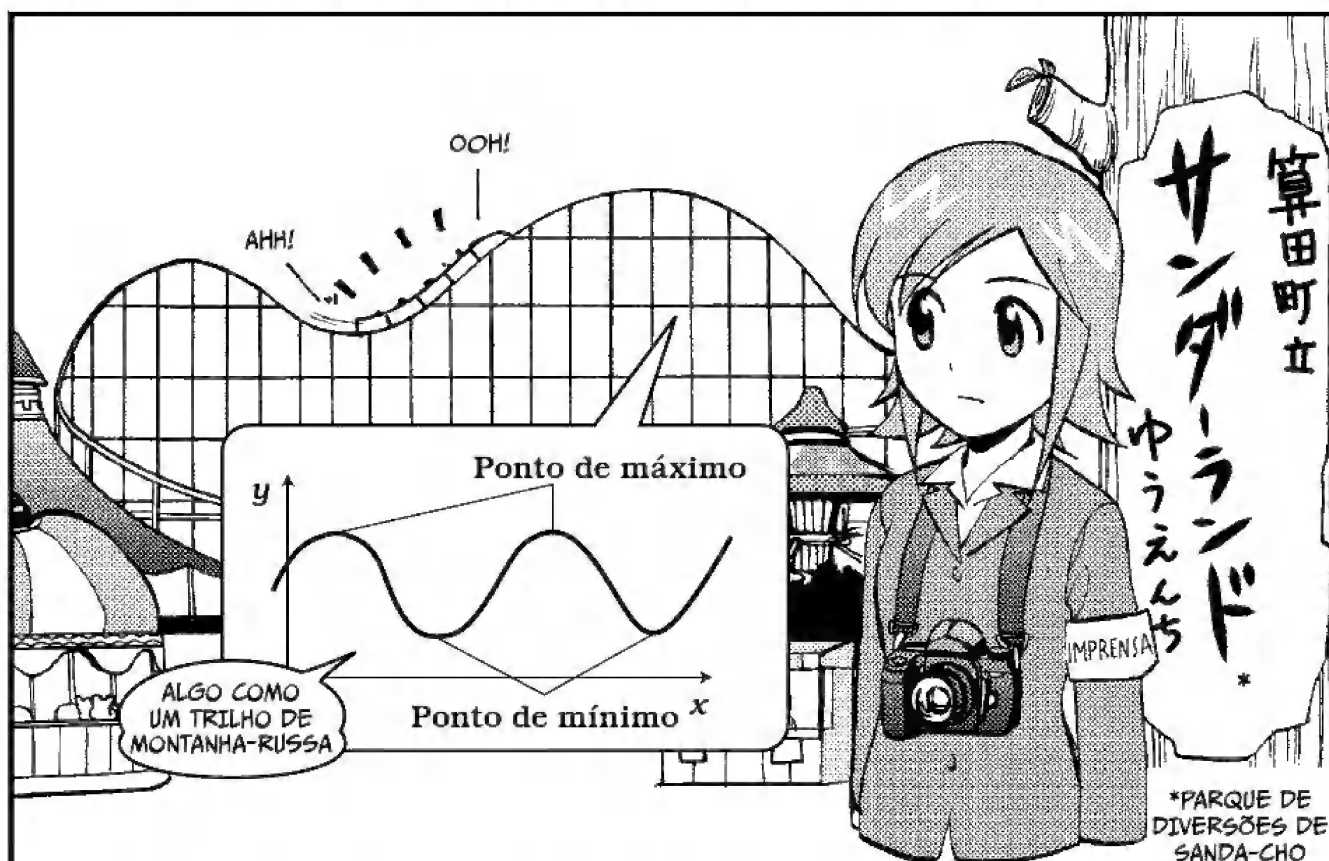
ISSO PODE SER ALTERADO PARA...

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \approx f'(a)$$

SR. SEKI, O LADO ESQUERDO DA EQUAÇÃO É DISTÂNCIA PERCORRIDA DIVIDIDA PELO TEMPO DE VIAGEM. ENTÃO, ISSO É A VELOCIDADE?

EXATO! ENTÃO, $f'(a)$ REPRESENTA A VELOCIDADE DE FUTOSHI AO PASSAR PELO PONTO A.

ENCONTRANDO OS PONTOS DE MÁXIMO E DE MÍNIMO



Máximo e mínimo são os pontos em que uma função muda de crescente para decrescente ou vice-versa. Portanto, eles são importantes para examinar as propriedades de uma função.

Como os pontos de máximo e de mínimo costumam ser o máximo ou mínimo absoluto, respectivamente, eles são pontos importantes para se obter uma solução otimizada.

TEOREMA 2-1: CONDIÇÕES PARA VALORES EXTREMOS

Se $y = f(x)$ tem um ponto de máximo ou de mínimo em $x = a$, então $f'(a) = 0$.

Isso significa que podemos encontrar os pontos de máximo e de mínimo encontrando valores para a que satisfaçam $f'(a) = 0$. Esses valores também são chamados de pontos extremos.



USANDO FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

FÓRMULA 3-1: FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

$$\textcircled{1} \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Os intervalos das integrais definidas de uma mesma função podem ser juntados.

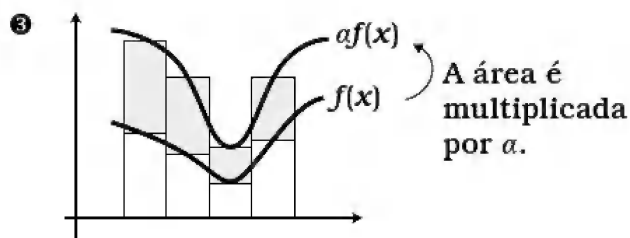
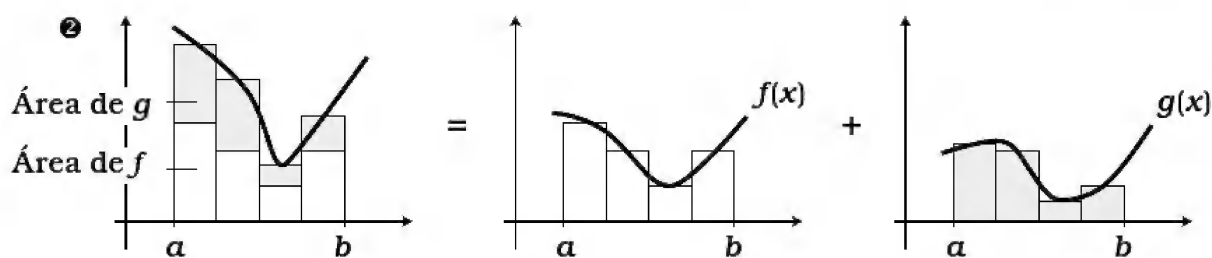
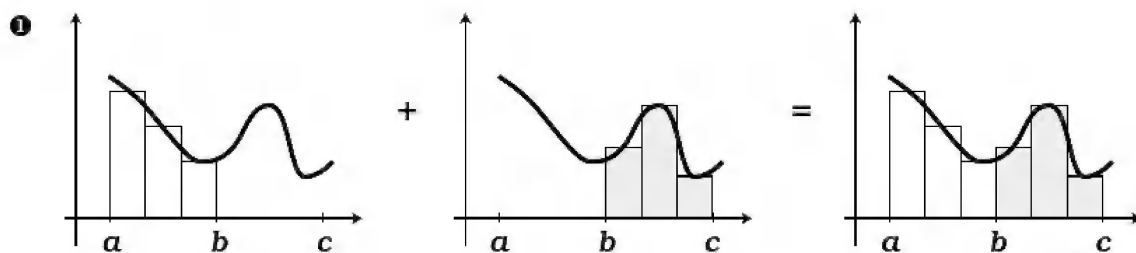
$$\textcircled{2} \quad \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

A integral definida de uma soma pode ser dividida na soma das integrais definidas.

$$\textcircled{3} \quad \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

Uma constante de multiplicação dentro de uma integral definida pode ser movida para fora da integral.

As expressões de $\textcircled{1}$ a $\textcircled{3}$ podem ser entendidas intuitivamente se desenharmos suas figuras.



ENTENDI.

Provado que a Integral da Velocidade é a Distância!

Integral da velocidade = diferença na posição = distância percorrida

Se entendermos essa fórmula, dizem que conseguiremos calcular a distância percorrida por objetos cuja velocidade muda constantemente. Mas isso é verdade? Nossa promissora jornalista novata Noriko Hikima vai a fundo na verdade sobre esse assunto em seu relato contundente.

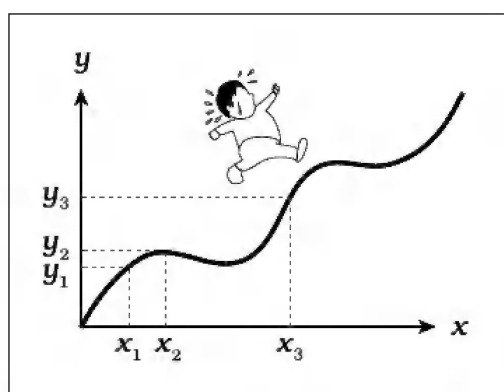


Figura 1: Este gráfico representa a distância percorrida por Futoshi ao longo do tempo. Ele se move pelos pontos $y_1, y_2, y_3 \dots$ conforme o tempo passa em $x_1, x_2, x_3 \dots$

Sanda-Cho – Alguns leitores se lembrarão do nosso exemplo anterior descrevendo Futoshi caminhando em uma esteira rolante. Outros terão bloqueado deliberadamente tal imagem suada de suas mentes. Mas é quase certa que você se recorda que a derivada da distância é a velocidade.

$$\textcircled{1} \quad y = F(x)$$

$$\textcircled{2} \quad \int_a^b v(x) dx = F(b) - F(a)$$

A equação $\textcircled{1}$ expressa a posição do enorme e suado Futoshi. Em outras palavras, após x segundos ele se arrastou por uma distância total y .

Integral da Velocidade = Diferença na Posição

A derivada de $F'(x)$ da expressão $\textcircled{1}$ é a “velocidade instantânea” em x segundos. Se rescrevermos $F'(x)$ como $v(x)$, usando v para velocidade, o Teorema Fundamental do Cálculo pode ser usado para obter a equação $\textcircled{2}$! Observe o gráfico de $v(x)$ na Figura 2-A – a velocidade de Futoshi ao longo do tempo. A parte sombreada do gráfico equivale à integral – equação $\textcircled{2}$.

Mas olhe também para a Figura 2-b, que mostra a distância que Futoshi percorreu ao longo do tempo. Se observarmos as Figuras 2-A e 2-B lado a lado, veremos que a integral da velocidade é igual à diferença na posição (ou distância)! Repare como

os dois gráficos batem um com o outro – quando a velocidade de Futoshi é positiva, sua distância aumenta, e vice-versa.

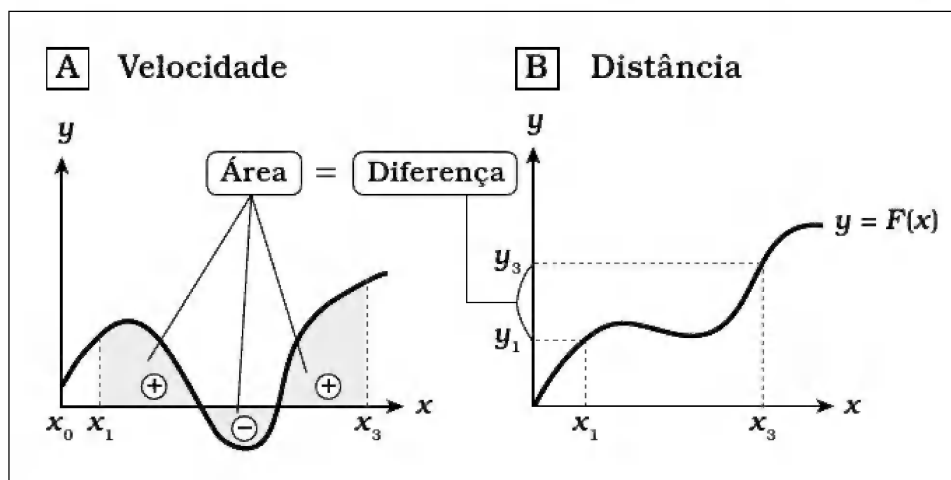


Figura 2

USANDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS



*NOTA TRAD.: NORIKO FAZ UM TROCADILHO COM O TERMO "A LITTLE BIT", QUE SIGNIFICA "UM POQUINHO" EM INGLÊS

GENERALIZANDO FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS



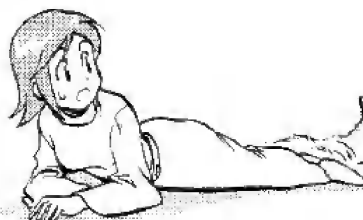
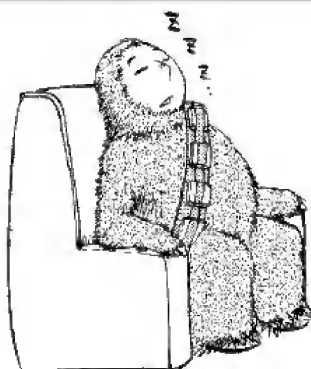
APESAR DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARÍTMICA SEREM CONVENIENTES, A DEFINIÇÃO QUE FIZEMOS DELAS ATÉ AGORA PERMITE APENAS NÚMEROS NATURAIS PARA x EM $f(x) = 2^x$ E POTÊNCIAS DE 2 PARA y EM $g(y) = \log_2 y$. NÃO TEMOS UMA DEFINIÇÃO PARA A POTÊNCIA -8 , A POTÊNCIA $7/3$ OU A POTÊNCIA $\sqrt{2}$, $\log_2 5$, OU $\log_2 \pi$.

HMM, O QUE FAZEMOS, ENTÃO?



VOU LHE CONTAR COMO DEFINIMOS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS EM GERAL, USANDO EXEMPLOS.

FELIZ QUE TENHA PERGUNTADO EU ESTOU. A FORÇA DO CÁLCULO USAMOS PARA ISSO. SIM.



PRIMEIRO, USANDO O NOSSO EXEMPLO ANTERIOR, VAMOS MUDAR A TAXA DE CRESCIMENTO ECONÔMICO ANUAL PARA SUA TAXA DE CRESCIMENTO INSTANTÂNEA.

Taxa de crescimento anual = $\frac{\text{Valor após 1 ano} - \text{Valor atual}}{\text{Valor atual}} = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$



COMEÇAREMOS COM ESSA EXPRESSÃO.

EXPANSÃO DE TAYLOR DE VÁRIAS FUNÇÕES

[1] EXPANSÃO DE TAYLOR DE UMA RAIZ QUADRADA

Considerando $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$.

Então, partindo de $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} (1+x)^{-\frac{5}{2}}, \dots$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}, f'''(0) = \frac{3}{8}, \dots$$

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!} \times \left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{3!} \times \frac{3}{8}x^3 + \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \dots$$

[2] EXPANSÃO DE TAYLOR DA FUNÇÃO EXPONENCIAL e^x

Se fizermos $f(x) = e^x$,

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x, \dots$$

Então, partindo de

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

Substituindo $x = 1$, obtemos

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

NO CAPÍTULO 4, APRENDEMOS QUE e VALE CERCA DE 2,7. AQUI, NÓS OBTAMOS A EXPRESSÃO QUE CALCULA SEU VALOR EXATO.



[3] EXPANSÃO DE TAYLOR DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA $\ln(1+x)$

Considerando $f(x) = \ln(x+1)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = -(1+x)^{-2}, f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3},$$

$$f^{(4)}(x) = -6(1+x)^{-4}, \dots$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 2!,$$

$$f^{(4)}(0) = -3!, \dots$$

Temos, então

$$\ln(1+x) =$$

$$0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!} \times 2!x^3 - \frac{1}{4}3!x^4 + \dots$$

$$\ln(1+x) =$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}x^n + \dots$$

[4] EXPANSÃO DE TAYLOR DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Considerando $f(x) = \cos x$.

$$f'(x) = -\text{seno } x, f''(x) = -\cos x, f^{(3)}(x) = \text{seno } x, f^{(4)}(x) = \cos x, \dots$$

Partindo de

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1,$$

$$f^{(3)}(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1, \dots$$

Então,

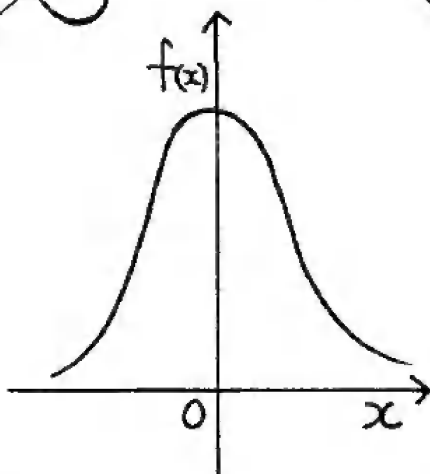
$$\cos x = 1 + 0x - \frac{1}{2!} \times 1 \times x^2 + \frac{1}{3!} \times 0 \times x^3 + \frac{1}{4!} \times 1 \times x^4 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \dots$$

De forma semelhante,

$$\text{seno } x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \dots$$

QUANDO ANALISAMOS COISAS INCERTAS USANDO A PROBABILIDADE, NORMALMENTE USAMOS A DISTRIBUIÇÃO NORMAL.



UH-HUH.

ESSA DISTRIBUIÇÃO É DESCRITA POR UMA DENSIDADE DE PROBABILIDADE QUE É PROPORCIONAL A

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

APÓS SER REDIMENSIONADA. O GRÁFICO DE $f(x)$ É SIMÉTRICA EM TORNO DO EIXO Y, COMO MOSTRA A FIGURA, E ELE SE PARECE COM UM SINO.

DESCULPE. ELE VAI ESCREVER PRA CARAMBA. VOCÊ PODE NOS DAR MAIS ALGUNS PORTA-COPOS?

RABISCA
RABISCA

PLUMP

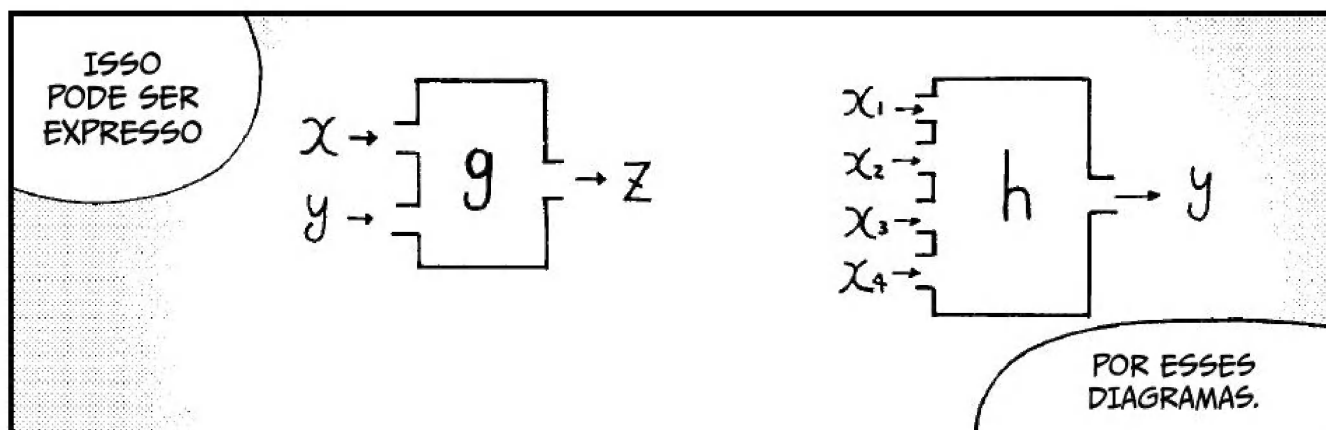
MUITO FENÔMENOS POSSUEM ESSA FORMA DE DISTRIBUIÇÃO. POR EXEMPLO, AS ALTURAS DE HUMANOS E ANIMAIS TÍPICAMENTE TÊM ESSA DISTRIBUIÇÃO.

ERROS DE MEDIÇÃO, TAMBÉM.

BONC

NOS CÍRCULOS FINANCEIROS, ACREDITA-SE QUE AS TAXAS DE GANHO COM AÇÕES TENHAM UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL.

ALGUMAS CLASSIFICAÇÕES DE ESTUDANTES TÊM SIDO BASEADAS EM UMA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PORQUE OS RESULTADOS DAS PROVAS COSTUMAM SE DISTRIBUIR DESSA MANEIRA.



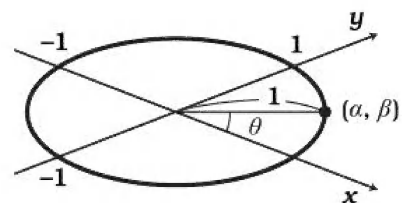
Com isso, descobrimos o seguinte.

Se $z = f(x, y)$ possui uma função linear de aproximação perto de $(x, y) = (a, b)$, ela é dada por

$$\textcircled{3} \quad z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

$$\text{ou}^* \quad z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

Considere um ponto (α, β) em um círculo de raio 1 centralizado na origem do plano $x - y$ (o chão). Temos $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (ou $\alpha = \cos \theta$ e $\beta = \sin \theta$). Agora calculamos a derivada na direção de $(0, 0)$ a (α, β) . Um deslocamento de distância t nessa direção é expressa por $(a, b) \rightarrow (a + \alpha t, b + \beta t)$. Se fizermos $\varepsilon = \alpha t$ e $\delta = \beta t$ em **1**, obtemos



$$\begin{aligned} \text{Erro relativo} &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b) - (p\alpha t + q\beta t)}{\sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta^2 t^2}} \\ &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b)}{t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - p\alpha - q\beta \\ &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b)}{t} - p\alpha - q\beta \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{Como } \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$$

Assumindo $p = f_x(a, b)$ e $q = f_y(a, b)$, nós modificamos **4** como segue:

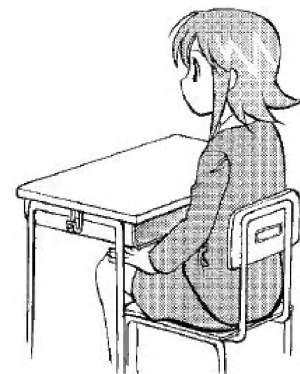
$$\textcircled{5} \quad \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b + \beta t)}{t} + \frac{f(a, b + \beta t) - f(a, b)}{t} - f_x(a, b)\alpha - f_y(a, b)\beta$$

Como a derivada de $f(x, b + \beta t)$, uma função de x apenas, em $x = a$ fica

$$f_x(a, b + \beta t)$$

obtemos, a partir da função linear de aproximação com uma variável,

$$f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b + \beta t) \approx f_x(a, b + \beta t)\alpha t$$



* Nós calculamos a função linear de aproximação de forma tal que seu erro relativo se aproxima de 0 quando $AP \rightarrow 0$ na direção de x ou y . No entanto, não fica aparente se o erro relativo $\rightarrow 0$ quando $AP \rightarrow 0$ em qualquer direção para a função linear que é construída a partir das derivadas $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$. Agora nós vamos olhar isso com mais detalhes, apesar da discussão aqui não ser tão rígida.

A

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS

PRÓLOGO

1. Substituindo

$$y = \frac{5}{9}(x - 32) \text{ em } z = 7y - 30, z = \frac{35}{9}(x - 32) - 30$$

CAPÍTULO 1

1. A. $f(5) = g(5) = 50$
B. $f'(5) = 8$

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(a + \varepsilon)^3 - a^3}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2) = 3a^2 \end{aligned}$$

Então, a derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 3x^2$.

CAPÍTULO 2

1. A solução é

$$f'(x) = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

B

PRINCIPAIS FÓRMULAS, TEOREMAS E FUNÇÕES APRESENTADOS NESTE LIVRO

EQUAÇÕES LINEARES (FUNÇÕES LINEARES)

A equação de uma reta que tenha inclinação m e que passe por um ponto (a, b) :

$$y = m(x - a) + b$$

DERIVAÇÃO

COEFICIENTES DIFERENCIAIS

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

DERIVADAS

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Outras notações de derivadas

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx} f(x)$$

CONSTANTE DE MULTIPLICAÇÃO

$$\{\alpha f(x)\}' = \alpha f'(x)$$

DERIVADAS DE FUNÇÕES DE GRAU N

$$\{x^n\}' = nx^{n-1}$$